7. Lineární rovnice

Při řešení rovnice chceme určit všechna čísla, která rovnici vyhovují. Říkáme jim *kořeny rovnice*. Když kořen dosadíme za neznámou do levé i pravé strany rovnice, dostaneme stejnou hodnotu. Jsme spokojeni, vyšla nám *zkouška*. Pokud se hodnoty liší, stala se někde chyba.

Kořen rovnice lze někdy odhadnout. Například kořenem rovnice $2x-10=0$ je (mezi žáky populární) číslo 5. Většinou však řešíme rovnice, které obsahují složitější výrazy. Pak rovnice musíme upravovat. Provádíme ekvivalentní úpravy, které kořeny rovnice nezmění.

Mezi *ekvivalentní úpravy* patří:

- Přičtení stejného čísla nebo mnohočlenu (většinou násobku neznámé) k oběma stranám rovnice.
- Odečtení stejného čísla nebo mnohočlenu (většinou násobku neznámé) od obou stran rovnice.
- Násobení nebo dělení obou stran rovnice stejným číslem, které se nerovná nule.

Při řešení rovnice také často zjednodušujeme výrazy zvlášť na levé či pravé straně. Na závěr řešení pak někdy zaměníme strany tak, aby na levé byla neznámá, např. $x=1$.

7.1 Jednoduché rovnice pro nesmělé řešitele

Varování: v následující části kapitoly budou jen lehké rovnice. Dobří řešitelé rovnic tuto část mohou vynechat nebo jen zkontrolovat své dovednosti ve cvičení. Pro nesmělé či začínající řešitele je tato část připravena tak, aby každý možný problém vysvětlila.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 1

Řešte rovnici $4x-9=11$ s neznámou x a proveďte zkoušku.

Řešení

Nejdříve chceme dosáhnout toho, aby na levé straně zůstal pouze výraz $4x$. Čísla –9 se zbavíme tak, že k oběma stranám rovnice přičteme číslo 9. Po této úpravě dostaneme:

$$4x-9+9=11+9$$
$$4x=20$$

Nyní obě strany rovnice vydělíme číslem 4 a dostaneme kořen rovnice:

$$x=20:4$$
$$x=5$$

Zkoušku provedeme dosazením čísla 5 nejdříve do levé strany rovnice: $L(5) = 4 \cdot 5 - 9 = 11$.

Také pravá strana $P(5) = 11$. Tím je potvrzeno, že kořenem rovnice je $x = 5$.

PŘÍKLAD 2

Řešte rovnici $-4x + 10 = 6x - 20$ s neznámou x a proveďte zkoušku.

Řešení

Poradíme, jak dál	Zápis řešení rovnice (postupně odkrývejte)
Pozorně opište zadání rovnice.	$-4x + 10 = 6x - 20$
Odečtením čísla 10 se zbavte čísla 10 na levé straně.	$-4x + 10 = 6x - 20 \quad / -10$
Nyní odstraňte výraz $6x$ z pravé strany.	$-4x = 6x - 30 \quad / -6x$
Nyní dělte číslem -10.	$-10x = -30 \quad / : (-10)$
Pozor na výsledek dělení dvou záporných čísel.	$x = -30 : (-10)$
Kořenem rovnice je číslo 3.	$x = 3$

Zkouška:

$L(3) = -4 \cdot 3 + 10 = -2, P(3) = 6 \cdot 3 - 20 = -2$

$L(3) = P(3)$

PŘÍKLAD 3

Řešte rovnici $3 \cdot (2x - 4) = 8x + 6$ s neznámou x a proveďte zkoušku.

Řešení

Poradíme, jak dál	Zápis řešení rovnice (postupně odkrývejte)
Pozorně opište zadání rovnice.	$3 \cdot (2x - 4) = 8x + 6$
Odstraňte závorky na levé straně.	$6x - 12 = 8x + 6$
Přičtením čísla 12 se zbavte čísla -12 na levé straně.	$6x - 12 = 8x + 6 \quad / +12$
Nyní je nutné odstranit $8x$ na pravé straně.	$6x = 8x + 18 \quad / -8x$
Potřebujete jen „holé“ x, musíte dělit číslem -2.	$-2x = 18 \quad / : (-2)$
Kořenem rovnice je číslo -9.	$x = -9$

Zkoušku provedeme dosazením kořene za neznámou nejprve do levé strany a pak pravé strany rovnice:

$$L(-9)=3\cdot[2\cdot(-9)-4]=3\cdot(-22)=-66$$
$$P(-9)=8\cdot(-9)+6=-72+6=-66$$
$$L(-9)=P(-9)$$

PŘÍKLAD 4

Řešte rovnici $7-(2u-7)-3\cdot(5u+6)=3+u-(5+2u)$ s neznámou u.

Řešení

Řešení zapíšeme zkráceným postupem. Druh úpravy vyznačíme za šikmým lomítkem.

Nejdříve ale musíme zjednodušit výrazy zvlášť na každé straně rovnice.

$$7-(2u-7)-3\cdot(5u+6)=3+u-(5+2u)$$
$$7-2u+7-15u-18=3+u-5-2u$$
$$-17u-4=-u-2 \quad /+4$$
$$-17u=-u+2 \quad /+u$$
$$-16u=2 \quad /:(-16)$$
$$u=-\frac{2}{16}$$
$$u=-\frac{1}{8}$$

Zkouška není v zadání požadována. Protože jsme prováděli ekvivalentní úpravy, je zkouška jen kontrolou našich výpočtů a pokud si věříme, můžeme ji vynechat. V tomto případě je sebevědomí dobrá věc, zkouška by byla dost pracná.

Kořenem rovnice je jediné číslo $u=-\frac{1}{8}$.

Předchozí rovnice byla náročná na pozorné počítání, ale jinak bez komplikací. Jsou však také rovnice, které způsobí problém až v samotném závěru.

PŘÍKLAD 5

Porovnejte řešení rovnic:

a) $2x+5=2\cdot(x+3)$

b) $2x+5=2\cdot(x+2{,}5)$

Řešení

$2x+5=2\cdot(x+3)$ $2x+5=2x+6 \quad /-5$ $2x=2x-1 \quad /-2x$ $0=-1$	$2x+5=2\cdot(x+2{,}5)$ $2x+5=2x+5 \quad /-5$ $2x=2x \quad /-2x$ $0=0$

Jak vysvětlíme oba netypické výsledky úprav?

a) V případě rovnice $2x+5=2\cdot(x+3)$ vychází neplatná rovnost $0=-1$. Volba žádné hodnoty neznámé nezajistí, aby se nula rovnala číslu -1.
Rovnice nemá žádné řešení.

b) V případě rovnice $2x+5=2\cdot(x+2{,}5)$ vychází platná rovnost $0=0$. Ta je splněna, ať dosadíme do původní rovnice jakékoliv číslo, nejen nulu, ale třeba i milión. Vždyť hned po vynásobení závorek vychází rovnost stejných výrazů $2x+5=2x+5$. Dál už jsme rovnici ani nemuseli upravovat. Je už vše jasné?
Řešením rovnice je každé reálné číslo.

CVIČENÍ

1. Řešte rovnici $2x-8=6$ s neznámou x a proveďte zkoušku.

2. Řešte rovnici $11x+15=13x+17$ s neznámou x a proveďte zkoušku.

3. Řešte rovnici $4-[5-x-(6-2x)]=0$ s neznámou x a proveďte zkoušku.

4. Řešte rovnici $2\cdot(7x-6)=-5\cdot(3x+4)-2-x$ s neznámou x a proveďte zkoušku.

5. Kolik přirozených čísel vyhovuje rovnici $3\cdot(-2x-7)-2\cdot(x+8)=4x$?

6. Která z uvedených rovnic nemá řešení

A. $2x+5=5$

B. $2x+5=2x$

C. $2x+5=2x+5$

D. $2x+5=-2x-5$

E. $2x+5=-5$

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. Kořenem rovnice je $x=7$. Zkouška: $L(7)=P(7)=6$.

2. Kořenem rovnice je $x = -1$. Zkouška: $L(-1) = P(-1) = 4$.

3. Kořenem rovnice je $x = 5$. Zkouška: $L(5) = P(5) = 0$.

4. Kořenem rovnice je $x = -\frac{1}{3}$. Zkouška: $L\left(-\frac{1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{50}{3}$.

5. Rovnici nevyhovuje žádné přirozené číslo. Kořenem rovnice je totiž číslo $x = -\frac{37}{12}$.

6. Úpravou rovnice $2x + 5 = 2x$ vychází $5 = 0$. Správná odpověď je B.

7.2 Když se do rovnice připletou zlomky

Zlomků je třeba se zbavit co nejdříve. Proto zpravidla při první úpravě *násobíme obě strany rovnice nejmenším společným násobkem jmenovatelů.* Tento krok ovšem přináší jistá rizika…

ŘEŠENÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 1

Které z uvedených řešení rovnice $2 - \frac{3+x}{3} = x + 5$ s neznámou x je správné?

Řešení

$2-\dfrac{3+x}{3}=x+5 \quad /\cdot 3$	$2-\dfrac{3+x}{3}=x+5 \quad /\cdot 3$
$6-3+x=3x+15$	$6-(3+x)=3x+15$
$3+x=3x+15 \quad /-3$	$6-3-x=3x+15$
$x=3x+12 \quad /-3x$	$3-x=3x+15 \quad /-3$
$-2x=12 \quad /:(-2)$	$-x=3x+12 \quad /-3x$
$x=-6$	$-4x=12 \quad /:(-4)$
	$x=-3$

Obě strany rovnice násobíme jmenovatelem zlomku. Pozor na znaménka na levé straně rovnice. Zlomková čára nahrazuje závorku, odčítáme tedy výraz $(3+x)$, nejen číslo 3. Správný postup je tedy v pravé části tabulky.

Zkouška: $L(-3) = P(-3) = 2$

Závěr: Kořenem rovnice je číslo -3.

PŘÍKLAD 2

Řešte rovnici $\frac{3x-6}{4}-\frac{3+2x}{3}=2x+\frac{5}{2}$ s neznámou x.

Řešení

Nejdříve se zbavíme zlomků. Vynásobíme obě strany rovnice nejmenším společným násobkem jmenovatelů zlomků.

$$\frac{3x-6}{4}-\frac{3+2x}{3}=2x+\frac{5}{2} \quad /\cdot 12$$

$$3\cdot(3x-6)-4(3+2x)=12\cdot 2x+6\cdot 5$$

$$9x-18-12-8x=24x+30$$

$$x-30=24x+30 \quad /-24x+30$$

$$-23x=60 \quad /:(-23)$$

$$x=-\frac{60}{23}$$

PŘÍKLAD 3

Určete kořeny rovnic $\frac{x+4}{4}=6,\ \frac{2}{3}\cdot(x-4)+\frac{3}{4}\cdot(2x-5)=\frac{x+1}{2}.$

Jakému číslu se rovná součin těchto kořenů?

A. 0

B. 45

C. 83

D. 104

E. Jiný výsledek

Řešení

První rovnice má kořen $x=20$, druhá rovnice $x=\frac{83}{20}$.

Součin kořenů je roven číslu 83. Správná odpověď je C.

CVIČENÍ

1. Řešte rovnici $\frac{4x-2}{5}-\frac{5x+7}{10}=\frac{x}{2}$.

2. Řešte rovnici $4x-\frac{2}{3}\cdot(5x-4)=\frac{5}{6}-3x$.

3. Řešte rovnici $\frac{3-x}{2}-\frac{4+2x}{3}=4-\frac{x+7}{5}$.

4. Řešte rovnici $4\cdot(3x-8)-\frac{2}{3}\cdot(5x-4)=\frac{5}{6}-3\cdot(x-1)$.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. Kořen rovnice $x=-\frac{11}{2}$.

2. Kořen rovnice $x=-\frac{1}{2}$.

3. Kořen rovnice $x=-\frac{73}{29}$.

4. Kořen rovnice $x=\frac{199}{70}$.

7.3 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Když se neznámá dostane do jmenovatele zlomku, přinese to řešiteli nový problém. Zlomek nesmí mít ve jmenovateli nulu, neboť nulou, jak známo, dělit nelze. Všechny zlomky musí mít smysl. Nesmíme proto zapomenout zapsat tzv. *podmínky řešitelnosti* rovnice. Po určení kořenů pak je nutné zkontrolovat, zda podmínky jsou splněny.

ŘEŠENÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 1

Řešte rovnici $\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2}{3}$ a proveďte zkoušku.

Řešení

Nejdříve zapíšeme podmínku, za které má smysl zlomek na levé straně rovnice:

Podmínku $x-2\neq 0$ upravíme na $x\neq 2$. Číslo 2 nemůže být kořenem rovnice.

Rovnici nejdříve vynásobíme součinem jmenovatelů a dále upravujeme:

Úpravy rovnice	Zkouška
$\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2}{3}$ $3\cdot(2x+3)=2(x-2)$ $6x+9=2x-4$ $4x=-13$ $x=-\frac{13}{4}$	$L\left(-\frac{13}{4}\right)=\frac{2\cdot\left(-\frac{13}{4}\right)+3}{-\frac{13}{4}-2}=\frac{\frac{-13+6}{2}}{\frac{-13-8}{4}}=\frac{-7}{2}\cdot\frac{4}{-21}=\frac{2}{3}$ $P\left(-\frac{13}{4}\right)=\frac{2}{3}$ $L\left(-\frac{13}{4}\right)=P\left(-\frac{13}{4}\right)$

PŘÍKLAD 2

Řešte rovnici $\frac{3x+2}{6x+4}=\frac{1}{3}$.

Řešení

Podmínka řešitelnosti rovnice:

Podmínku $6x+4\neq 0$ upravíme na $x\neq -\frac{2}{3}$.

1. způsob řešení	2. způsob řešení
$\frac{3x+2}{6x+4}=\frac{1}{3}\quad /\cdot 3\cdot(6x+4)$ $9x+6=6x+4$ $3x=-2$ $x=-\frac{2}{3}$	$\frac{3x+2}{6x+4}=\frac{1}{3}$ $\frac{3x+2}{2\cdot(3x+2)}=\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

Podle prvního postupu vyšel sice kořen $x=-\frac{2}{3}$, ale ten je vyloučen podmínkou řešitelnosti.

Podle druhého postupu řešení neexistuje.

Závěr: Rovnice nemá žádné řešení.

PŘÍKLAD 3

Řešte rovnici $\frac{3x+2}{6x+4}=\frac{1}{2}$.

Řešení

Podmínka řešitelnosti rovnice:

Podmínku $6x+4\neq 0$ upravíme na $x\neq -\frac{2}{3}$.

1. způsob řešení	2. způsob řešení
$\frac{3x+2}{6x+4}=\frac{1}{2} \quad /\cdot 2\cdot(6x+4)$ $6x+4=6x+4$ $0=0$	$\frac{3x+2}{6x+4}=\frac{1}{2}$ $\frac{3x+2}{2\cdot(3x+2)}=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Oběma způsoby vychází, že kořenem rovnice je libovolné číslo. Uvážíme ještě podmínku řešitelnosti rovnice.

Závěr: Kořenem rovnice je každé číslo s výjimkou čísla $-\frac{2}{3}$.

PŘÍKLAD 4

Rozhodněte, zda rovnice $\frac{1}{y+3}+\frac{1}{2y+6}+\frac{1}{3y+9}=1$ má řešení v oboru celých čísel.

Řešení

Pro určení podmínek i další úpravy je nutné nejdříve rozložit jmenovatele zlomku na součiny.

$$\frac{1}{y+3}+\frac{1}{2\cdot(y+3)}+\frac{1}{3\cdot(y+3)}=1$$

Stačí tedy jediná podmínka řešitelnosti rovnice: $y+3\neq 0$, tedy $y\neq -3$

Za této podmínky můžeme rovnici vynásobit společným jmenovatelem a dále upravovat.

$$\frac{1}{y+3}+\frac{1}{2\cdot(y+3)}+\frac{1}{3\cdot(y+3)}=1 \quad /\cdot 6\cdot(y+3)$$

$$6+3+2=6y+18$$

$$11=6y+18 / -18$$

$$-7=6y / :6$$

$$y=-\frac{7}{6}$$

Závěr: Rovnice nemá v oboru celých čísel žádné řešení.